

Nemeth

# ATOMKI REPORT

HU ISSN 0231 3685

X/28 (1986)

RELATIVISZTIKUS KVANTUMMECHANIKA

Sailer K.



Institute of Nuclear Research of the  
Hungarian Academy of Sciences  
Debrecen, P.O. Box 51, H-4001, Hungary

RELATIVISZTIKUS KVANTUMMECHANIKA\*

Sailer K.

KLTE Elméleti Fizikai Tanszék, Debrecen

Áttekintjük azokat a legfontosabb kvantummechanikai ismereteket, amelyek az atommagok és a maganyag relativisztikus tárgyalásához elengedhetetlenül szükségesek:

1. A Dirac-egyenlet
2. A Dirac-mátrixok
3. A Lorentz-szimmetria
4. A Dirac-hullámfüggvény valószínűségi értelmezése
5. A szabad részecskére vonatkozó Dirac-egyenlet megoldásai
6. A szabad részecske polarizációja
7. A nukleonra vonatkozó Dirac-egyenlet
8. A Dirac-egyenlet és az egyrészecske-kép
9. A lyukelmélet
10. A töltéskonjugálás
11. A CPT-szimmetria
12. Homogén, izotróp külső térben mozgó nukleon
13. Centrális erőterben mozgó nukleon
14. A Foldy-Wouthuysen-féle előállítás. A spin-pálya kölcsönhatás.

BEVEZETÉS

Az előadás anyagának megválasztásakor Serot és Walecka [1] összefoglaló cikkét fogadtam el irányadónak arra nézve, hogy mely kérdések tekinthetők a magfizika szempontjából különösen fontosnak. Az ily módon kiválasztott résztémákat igyekeztem olyan egységes keretbe foglalni, amely rávilágít a relativisztikus kvantummechanika sikereire és hiányosságaira. Az előadás anyagának leírásakor arra törekedtem, hogy az írott változatot egyetemi hallgatók is felhasználhassák tanulmányaik során kiegészítő jegyzetként.

Az 1-7. pontokban egy relativisztikus részecske kvantumelméletének Dirac által javasolt kiépítését kíséreljük meg. A 8. pontban rámutatunk, hogy ez az út járhatatlan, hiszen a Dirac-egyenlet nem értelmezhető következetesen mint egyetlen részecske mozgásegyenlete. A Dirac-egyenlet helyes értelmezése felé vezető úton fontos állomás volt Dirac lyukelmélete, amelynek maradandó érdeme, hogy megjósolta a pozitron létezését /ld. 9. pont/. A lyukelmélet elvezetett a töltéskonjugálási szimmetria felismeréséig és ahhoz az értelmezéshez, hogy a Dirac-

\* Az 1986. szeptemberi Magfizikai őszi Iskolán az ATOMKI-ben elhangzott előadás anyaga.

egyenlet egyszerre írja le a részecskéket és az antirészecskéket; erről szól a 10. pont. Eközben azonban menethetetlenül elveszett a Dirac-egyenlet megoldásának kvantummechanikai hullámfüggvény jelentése. Jelenlegi ismereteink szerint a kvantált fizikai rendszerek relativisztikus leírása csak a kvantumtérelmélet keretében lehetséges. Ennek elemeit az előadás második részében (egy későbbi cikkben) fogjuk áttekinteni. A kvantumtérelméleti leírás során a Dirac-egyenlet a megfelelő klasszikus térelmélet téregyenletének szerepét játssza. Olyan kvantálási eljárást fogunk majd követni, amelynek alkalmazása során szükségünk lesz a klasszikus téregyenletek megoldásainak teljes rendszerére. Ezért a 12. és a 13. pontban vázoljuk a nukleonokra vonatkozó Dirac-egyenlet megoldását néhány, a magfizika szempontjából fontos esetben. Az ismertetett anyaghoz kapcsolódóan az olvasó további részleteket találhat a tankönyvekben [2-6].

## 1. A Dirac-egyenlet

A szabad részecskére vonatkozó Schrödinger-egyenlet relativisztikus általánosítását szeretnénk megkapni. Ezért az alábbi feltevéseket tesszük:

a/ Létezik a  $\psi(\vec{x}, t)$  hullámfüggvény, amely teljesen meghatározza a részecske állapotát és annak időbeli fejlődését:

$$i\partial_t \psi = H\psi, \quad (1.1)$$

ahol  $H$  lineáris hermitikus operátor.

b/ A részecske  $E$  energiája,  $\vec{p}$  impulzusa és  $M$  nyugalmi tömege között fennáll az Einstein-féle összefüggés:

$$E^2 = M^2 + \vec{p}^2. \quad (1.2)$$

c/ Érvényes az

$$E \rightarrow H \rightarrow i\partial_t, \quad \vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla} \quad (1.3)$$

megfeleltetés.

d/ A szabad részecske  $H$  Hamilton-operátora helytől független a rendszer eltolási invarianciája következtében és az impulzus-operátort lineárisan tartalmazza annak érdekében, hogy az (1.1) egyenlet Lorentz-kovariáns lehessen.

A c/ és d/ feltevések alapján a Hamilton-operátor

$$H = -i\alpha^j \nabla^j + \beta M \quad (1.4)$$

alakú, ahol  $\alpha^j$  ( $j=1,2,3$ ) és  $\beta$  "számok". Következésképpen az (1.1) egyenlet az

$$(i\partial_t + i\alpha^j \nabla^j - \beta M)\psi = 0 \quad (1.5)$$

alakot ölti. Ez a Dirac-egyenlet. A b/ és c/ feltevés értelmében az (1.5) egyenletből az

$$(-\partial_t^2 + \vec{\nabla}^2 - M^2)\psi = 0 \quad (1.6)$$

egyenletnek kell következni. Az (1.5) egyenletből (1.6) egyenlet akkor és csak akkor következik, ha az  $\alpha^j$ ,  $\beta$  "számok" jól meghatározott algebrai tulajdonságokkal rendelkeznek. Ennek belátása érdekében hassunk az (1.5) egyenletre balról az  $(i\partial_t - i\vec{\alpha}\vec{\nabla} + \beta M)$  operátorral:

$$\begin{aligned} & (i\partial_t - i\alpha^j \nabla^j + \beta M)(i\partial_t + i\alpha^k \nabla^k - \beta M)\psi = \\ & = [-\partial_t^2 + (-i\alpha^j \nabla^j + \beta M)(i\alpha^k \nabla^k - \beta M)]\psi = \\ & = [-\partial_t^2 + \frac{1}{2}(\alpha^j \alpha^k + \alpha^k \alpha^j) \nabla^j \nabla^k + iM(\beta \alpha^j + \alpha^j \beta) \nabla^j - M^2 \beta^2]\psi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Az (1.7) egyenlet akkor és csak akkor azonos az (1.6) egyenlettel, ha

$$\alpha^j \alpha^k + \alpha^k \alpha^j = 2\delta^{jk}, \quad \beta \alpha^j + \alpha^j \beta = 0, \quad \beta^2 = 1. \quad (1.8)$$

Az (1.8) követelmények közönséges számokkal nem elégíthetők ki, csak mátrixokkal, mégpedig legkevesebb 4x4-es mátrixokkal:

$$\alpha^j = \rho^1 \tilde{\sigma}^j, \quad \beta = \rho^3, \quad (1.9)$$

ahol

$$\tilde{\sigma}^j = \sigma^j \otimes 1 = \begin{pmatrix} \sigma^j & 0 \\ 0 & \sigma^j \end{pmatrix}, \quad \rho^j = 1 \otimes \sigma^j. \quad (1.10)$$

Itt  $\Rightarrow \alpha^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ \sigma^j & 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

a Pauli-mátrixok. Az  $\alpha^j$  és  $\beta$  mátrixok önadjungáltak.

Mivel  $\alpha^j$  és  $\beta$  4x4-es mátrixok, ezért a hullámfüggvénynek 4 komponense van:  $\psi_\alpha(\vec{x}, t)$ ,  $\alpha=1,2,3,4$ . A helyzet analóg a klasszikus elektromágneses tér leírásával: a Maxwell-egyenletek is a térmennyiségekre vonatkozó lineáris, elsőrendű, csatolt parciális differenciálegyenletrendszer alkotnak, mint amilyenek a hullámfüggvény  $\psi_\alpha$  komponenseire vonatkozó egyenletek; ugyanakkor valamennyi térmennyiségre független hullámegyenlet érvényes, akár csak a hullámfüggvény valamennyi  $\psi_\alpha$  komponensére.

Az (1.6) Dirac-egyenlet a hullámfüggvény komponenseire az

$$(i\delta_{\alpha\beta} \partial_t + i\vec{\alpha}_{\alpha\beta} \vec{\nabla} - \beta_{\alpha\beta} M)\psi_\beta(\vec{x}, t) = 0 \quad (1.12)$$

egyenletrendszerrel jelenti.

## 2. A Dirac-mátrixok

A Dirac-egyenletet Lorentz-kovariáns alakban szeretnénk felírni. Ennek érdekében bevezetjük a Minkowski-térben az  $x^\mu = (t, \vec{x})$  ( $\mu=0,1,2,3$ ) koordinátákat és a  $(+1, -1, -1, -1)$  szignatúrájú  $g^{\mu\nu}$  metrikus tenzort. Néhány hasznos jelölés:

$$\begin{aligned}
 x_\mu &= g_{\mu\nu} x^\nu = (t, -\vec{x}), \\
 \partial^0 &= \partial_0 = \partial_t, \quad \partial^i = \partial/\partial x_i = -\nabla^i, \quad \partial_j = \partial/\partial x^j = \nabla^j, \\
 \hat{p}_\mu &= i\partial_\mu = (i\partial_t, -i\vec{\nabla}), \quad \hat{p}_\mu = i\partial_\mu = (i\partial_t, i\vec{\nabla}), \\
 p x &= p_\mu x^\mu = g_{\mu\nu} p^\mu x^\nu = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

(bármely  $x^\mu$  és  $p^\mu$  négyesvektor esetén).  
Vezessük be a

$$\gamma^0 = \beta, \quad \gamma^j = \beta \alpha^j \quad (j=1,2,3) \tag{2.2}$$

Dirac-mátrixokat. Segítségükkel a Dirac-egyenlet látszólag kovariáns alakot ölt:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M)\psi = 0, \quad / u^+ \dots u \rightarrow (i u^\dagger \gamma^\mu \partial_\mu - M) u = 0 \tag{2.3}$$

*$\gamma^\mu$  unitér m. redukál*

a Hamilton-operátor pedig

$$H = -i\gamma^0 \vec{\gamma} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 M \tag{2.4}$$

alakra hozható.

Az (1.8) csererelációkból

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{2.5}$$

*$\gamma^0 \gamma^0 = 1, \gamma^j \gamma^j = -1, \gamma^j \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^j$*

adódik.

A (2.5) csererelációkat kielégítő Dirac-mátrixok csak unitér-ekvivalencia erejéig vannak meghatározva. Mi a továbbiakban a (2.2) ábrázolást fogjuk használni. A Dirac-mátrixok  $\in K$  unitér! unitér mátrixok és

$$(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0. \tag{2.6}$$

*$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, (\gamma^j)^\dagger = -\gamma^j$*

A Dirac-mátrixokat további mátrixokkal kiegészítve egy bázist kapunk a  $4 \times 4$ -es mátrixok terében:

$$1_D, \gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma_5 = i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3, D^\mu = \gamma^\mu \gamma_5. \tag{2.7}$$

A (2.7) mátrixok egy algebrát alkotnak, az un. hiperkomplex számok algebráját. Van der Waerden bebizonyította, hogy a (2.7) hiperkomplex számok algebrájának egyetlen véges-dimenziós irreducibilis ábrázolása van, s az négydimenziós.

A  $\gamma_5$  mátrix néhány tulajdonsága:

$$\gamma_5 \text{ unitér, } (\gamma_5)^2 = 1_D, \tag{2.8}$$

$$\gamma_5 \gamma^\mu + \gamma^\mu \gamma_5 = 0, \quad [\gamma_5, \sigma^{\mu\nu}] = 0.$$

A (2.2) ábrázolásban

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

or with  
 $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  184

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ chiral basis}$$

### 3. A Lorentz-szimmetria

Tekintsük a Minkowski-tér azon (globális)

$$dx'^{\mu} = a^{\mu}_{\nu} dx^{\nu} \quad (3.1)$$

lineáris transzformációit, amelyek bármely két szomszédos tér-időpont távolságát változatlanul hagyják:

$$g_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}. \quad (3.2)$$

A (3.1) és (3.2) összefüggésekből

$$g_{\mu\nu} a^{\mu}_{\kappa} a^{\nu}_{\lambda} = g_{\kappa\lambda}, \quad (a^T)_{\kappa}^{\mu} g_{\mu\nu} a^{\nu}_{\lambda} = g_{\kappa\lambda} \quad (3.3)$$

adódik. A (3.3) összefüggések alapján

$$\det \underline{g} = \det (\underline{a}^T \underline{g} \underline{a}) = [\det (\underline{a})]^2 \det \underline{g}, \quad (3.4)$$

azaz

$$\det \underline{a} = \pm 1. \quad (3.5)$$

Másrészt ugyancsak (3.3) alapján

$$g_{00} = +1 = a^0_0 a^0_0 - a^i_0 a^i_0, \quad (3.6)$$

ahonnan

$$(a^0_0)^2 = 1 + a^i_0 a^i_0 \geq 1, \quad (3.7)$$

vagyis

$$a^0_0 \geq +1 \quad \text{vagy} \quad a^0_0 \leq -1 \quad (3.8)$$

lehet.

A (3.1) - (3.2) transzformációk csoportot alkotnak, ez a homogén Lorentz-transzformációk  $L$  csoportja. Az egységnyi determinánsu ( $\det \underline{a} = +1$ ), ortochron ( $a^0_0 \geq 1$ ) transzformációk az un. valódi Lorentz-transzformációk  $L_p$  alcsoportját alkotják.  $L_p$  egy hatparaméteres Lie-csoport. Az infinitezimális transzformációk

$$\underline{a} = 1 - i \delta\phi \underline{L} \underline{\vec{n}} - i \delta\psi \underline{K} \underline{\vec{v}} \quad (3.9)$$

alakúak, és az  $\underline{\vec{n}}$  egységvektor körüli  $\delta\phi$  szögű térbeli elforgatást valamint a  $\underline{\vec{v}}$  egységvektor irányában  $\delta\psi = \delta\psi$  sebességgel mozgó inerciális vonatkoztatási rendszerre való áttérést ("boost") jelent. A valódi Lorentz-transzformációk 6 generátora az

$$[\underline{L}^j, \underline{L}^k] = i \epsilon^{jkl} \underline{L}^l, \quad [\underline{K}^j, \underline{K}^k] = -i \epsilon^{jkl} \underline{L}^l, \quad [\underline{L}^j, \underline{K}^k] = i \epsilon^{jkl} \underline{K}^l \quad (3.10)$$

csererelációknak tesz eleget. ( $\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma}$  a teljesen antiszimmetrikus harmadrendű tenzor.) A véges valódi Lorentz-transzformációk

$$\underline{a} = \exp(-i\phi \underline{L} \underline{n} - i\psi \underline{K} \underline{v}) \quad (3.11)$$

alakúak, ahol  $\phi$  a térbeli elforgatás szöge és a  $\underline{v}$  irányban  $v$  sebességgel mozgó vonatkoztatási rendszerre való áttérést a  $\psi$  rapiditással jellemezzük ( $v = \tanh \psi$ ). Valamennyi paraméter zárt intervallumon belül változik a rapiditás kivételével, amelyre  $0 \leq \psi < \infty$ . Ezért  $L_p$  nem kompakt Lie-csoport.

Az  $L$  homogén Lorentz-csoport nem összefüggő csoport, ugyanígy tartalmaz olyan transzformációkat, amelyek nem érhetők el az egységelemből infinitezimális transzformációk egymásutáni alkalmazásával:

$$a/ \text{ tértükrözés: } \underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \det \underline{P} = -1, \quad P^0_0 \geq +1; \quad (3.12)$$

$$b/ \text{ időtükrözés: } \underline{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det \underline{T} = -1, \quad T^0_0 \leq -1; \quad (3.13)$$

$$c/ \text{ inverzió: } \underline{R} = \underline{P}\underline{T} = \underline{T}\underline{P}, \quad \det \underline{R} = 1, \quad R^0_0 \leq -1. \quad (3.14)$$

A  $\underline{P}$ ,  $\underline{T}$  és  $\underline{R}$  transzformációk bármelyikét a valódi Lorentz-transzformációkkal kombinálva nyerjük mindazokat a homogén Lorentz-transzformációkat, amelyek nincsenek benne az  $L_p$  alcsoportban.

Egy egyenletről akkor mondjuk, hogy Lorentz-kovariáns, ha az egyenlet két oldalán álló mennyiségek az  $L$  homogén Lorentz-csoport ugyanazon ábrázolásai szerint transzformálódnak. A fizikai rendszer Lorentz-szimmetriával rendelkezik, ha a rendszer  $H$  Hamilton-operátora felcserélhető az  $L_p$  alcsoport infinitezimális operátoraival, valamint a tértükrözés és az időtükrözés operátorával. Ilyenkor a hullámfüggvények a Lorentz-csoport véges-dimenziós, irreducibilis ábrázolásai szerint transzformálódnak. Ezek lehetnek egyértékű tenzorábrázolások vagy kétértékű spinorábrázolások.

A tenzorábrázolások közül a legalacsonyabb rendűek:

$$\begin{aligned} \text{skalár} & \quad \phi'(x') = \phi(x), \\ \text{vektor} & \quad A'_\mu(x') = a_\mu^\nu A_\nu(x), \\ \text{tenzor} & \quad F'_{\mu\nu}(x') = a_\mu^\kappa a_\nu^\lambda F_{\kappa\lambda}(x), \\ \text{pszeudoskalár} & \quad \phi'(x') = \phi(x) \det \underline{a}, \\ \text{pszeudovektor} & \quad H'_\mu(x') = a_\mu^\nu H_\nu(x) \det \underline{a}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

A (2.3) Dirac-egyenlet megoldását jelentő  $\psi(x)$  hullámfüggvény a homogén Lorentz-csoport egy spinorábrázolását valósítja meg. Megmutatható ugyanis hogy minden  $\underline{a}$  Lorentz-transzformációhoz létezik olyan  $\underline{S}(\underline{a})$  unitér mátrix, hogy a

$$\psi'(x') = \underline{S}(\underline{a}) \psi(x) \quad (3.16)$$

transzformált hullámfüggvény a (2.3) Dirac-egyenlettel azonos alakú

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - M) \psi'(x') = 0 \quad (3.17)$$

egyenletet elégíti ki; és az  $\underline{S}(\underline{a})$  mátrix az  $\underline{a}$  transzformáció paramétereinek kétértékű függvénye. A Lorentz-transzformációk mátrixai ebben az ábrázolásban /a Dirac-mátrixok (2.9) ábrázolását használva/:

$$\begin{aligned} L_p : \quad \underline{S}^{\mu\nu}(\varphi) &= \exp(i\sigma^{\mu\nu}\varphi/2), \\ (\mu\nu) &= (12), (13), (23): \quad \text{szögű térbeli forgatás a 3, 2 ill. 1 tengely körül} \\ (\mu\nu) &= (01), (02), (03): \quad \text{"boost", } v = \tanh\varphi \\ P : \quad \underline{S}(\underline{p}) &= \pm \gamma^0, \\ T : \quad \underline{S}(\underline{T}) &= i\gamma^1\gamma^3\mathcal{K} \end{aligned} \quad (3.18)$$

( $\mathcal{K}$  a komplex konjugálás operátora).

Vezessük be a  $\psi(x)$  Dirac-spinor  $\bar{\psi}(x)$  Dirac-adjungáltját:

$$\bar{\psi}(x) = \psi(x)^\dagger \gamma^0. \quad (3.19)$$

A hullámfüggvény Dirac-adjungáltjára vonatkozó egyenletet a (2.3) Dirac-egyenletből adjungálással,

$$-i \partial_\mu \psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger} - \psi^\dagger M = 0 \quad (3.20)$$

és jobbról  $\gamma^0$  mátrixszal való szorzással kapjuk:

$$i \partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu + M \bar{\psi} = 0. \quad (3.21)$$

(Felhasználtuk a (2.6) összefüggést.)

A Dirac-spinorok bilineáris kifejezései a tenzorábrázolások szerint transzformálódnak:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') \psi'(x') &= \bar{\psi}(x) \psi(x) & - & \text{skalár} \\ \bar{\psi}'(x') \gamma_5 \psi'(x') &= \bar{\psi}(x) \gamma_5 \psi(x) \det \underline{a} & - & \text{pszeudoskalár} \\ \bar{\psi}'(x') \gamma^\mu \psi'(x') &= a^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x) & - & \text{vektor} \\ \bar{\psi}'(x') \gamma_5 \gamma^\mu \psi'(x') &= a^\mu_\nu \bar{\psi}(x) \gamma_5 \gamma^\nu \psi(x) \det \underline{a} & - & \text{pszeudovektor} \\ \bar{\psi}'(x') \sigma^{\mu\nu} \psi'(x') &= a^\mu_\kappa a^\nu_\lambda \bar{\psi}(x) \sigma^{\kappa\lambda} \psi(x) & - & \text{másodrendű tenzor} \\ & & \text{stb.} & \end{aligned} \quad (3.22)$$

#### 4. A Dirac-hullámfüggvény valószínűségi értelmezése

A (3.22) tulajdonságok alapján a

$$j^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma^\mu \psi(x) = (\psi^\dagger(x) \psi(x), \psi^\dagger(x) \vec{\alpha} \psi(x)) \quad (4.1)$$

mennyiség négyesvektor. Megmutatjuk, hogy a  $j^\mu(x)$  négyesvektorra kontinuitási egyenlet áll fenn. Szorozzuk meg a (2.3) egyenletet balról  $\bar{\psi}$ -tal, a (3.20) egyenletet pedig jobbról  $\psi$ -vel és vonjuk ki a két egyenletet egymásból. Ekkor a

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0 \\ -i\partial_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow i\partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu \psi) = 0 \quad (4.2)$$

kontinuitási egyenletet kapjuk.

Mivel

$$\psi^\dagger \psi = \psi_\alpha^* \psi_\alpha \geq 0, \quad (4.3)$$

azért  $j^\mu(x)$  tekinthető a valószínűségi áramsűrűség négyesvektorának, ha a hullámfüggvényeket a megmaradó találati valószínűség

$$\int j^0(x) d^3x = \int \psi^\dagger(x) \psi(x) d^3x = 1 \quad (4.4)$$

értékével normáljuk. A (4.4) normálási feltétel megengedett, mert a baloldalon Lorentz-skalár áll /egy négyesvektor időszerű komponensének és a térfogatelemnek a szorzata/, amely a (4.2) kontinuitási egyenletből következően megmaradó.

#### 5. A szabad részecskére vonatkozó Dirac-egyenlet megoldásai

A szabad részecskére vonatkozó

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - M) \psi(x) = 0 \quad (5.1)$$

Dirac-egyenlet stacionárius megoldásait

$$\psi(x) = U(\vec{p}) \exp(-ipx) = U(\vec{p}) \exp(-iet + i\vec{p}\vec{x}) \quad (5.2)$$

alakban keressük. Ekkor az  $U(\vec{p})$  Dirac-spinorra az

$$(\gamma^\mu p_\mu - m) U(\vec{p}) = 0 \Rightarrow (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta M) U(\vec{p}) = \epsilon U(\vec{p}) \quad (5.3)$$

egyenletet kapjuk. Az

$$U(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \chi(\vec{p}) \\ \phi(\vec{p}) \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

felbontás után az (5.3) egyenlet az

$$\begin{pmatrix} (M - \epsilon)1 & \vec{\sigma} \vec{p} \\ \vec{\sigma} \vec{p} & -(M + \epsilon)1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi(\vec{p}) \\ \phi(\vec{p}) \end{pmatrix} = 0 \quad (5.5)$$

alakot ölti. Az (5.5) egyenletnek akkor és csak akkor létezik nem triviális megoldása, ha

$$\det \begin{pmatrix} (M-\epsilon)1 & \vec{\sigma}\vec{p} \\ \vec{\sigma}\vec{p} & -(M+\epsilon)1 \end{pmatrix} = 0, \quad (5.6)$$

azaz

$$\det [-(M^2 - \epsilon^2) - (\vec{\sigma}\vec{p})^2] = (\epsilon^2 - \vec{p}^2 - M^2)^2 = 0, \quad (5.7)$$

ahonnan

$$\epsilon = \pm (M^2 + \vec{p}^2)^{1/2} = \pm E(\vec{p}) = E^{(\pm)}(\vec{p}). \quad (5.8)$$

A Dirac-egyenlet (5.2) alakú megoldását pozitív ill. negatív energiás /frekvenciás/ megoldásnak nevezzük, ha rendre  $\epsilon (=E^{(+)}(\vec{p})) > 0$  ill.  $\epsilon (=E^{(-)}(\vec{p})) < 0$ . A szabad Dirac-egyenletnek egyaránt vannak pozitív és negatív frekvenciás megoldásai. Mivel az (5.6) egyenlet negyedfoku, így minden energiasajátérték kétszeresen elfajult. Az energia-sajátértékek impulzusfüggését az 1. ábra mutatja.

Keressük meg az (5.5) egyenlet pozitív és negatív energiás megoldásait:

Ha  $\epsilon = E^{(+)}(\vec{p}) = +E(\vec{p})$ , akkor

$$(M - E(\vec{p}))\chi(\vec{p}) + \vec{\sigma}\vec{p}\phi(\vec{p}) = 0, \quad (5.9)$$

$$\vec{\sigma}\vec{p}\chi(\vec{p}) - (M + E(\vec{p}))\phi(\vec{p}) = 0. \quad (5.10)$$

Mivel  $M + E(\vec{p}) > 0$ , így az (5.10) egyenletből

$$\phi(\vec{p}) = \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{M + E(\vec{p})}\chi(\vec{p}) \quad (5.11)$$

adódik. Tehát az (5.5) egyenlet megoldása

$$u_{\epsilon > 0}(\vec{p}) = \omega(\vec{p}, \epsilon_r = +1) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \chi(\vec{p}) \\ \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{M + E(\vec{p})}\chi(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

ahol  $\chi(\vec{p})$  tetszőleges kétkomponensű spinor,  $\mathcal{N}$  normálási tényező és  $\epsilon_r = \text{sgn } \epsilon$ . Az (5.2) megoldás így

$$\psi_p^{(+)}(x) = \exp(-iE(\vec{p})t + i\vec{p}\vec{x})\omega(\vec{p}, \epsilon_r = 1) = \exp(-i\epsilon_r p x)\omega(\vec{p}, \epsilon_r = 1) \quad (5.13)$$

alakba írható, ahol  $p_0 = +E(\vec{p})$ .

Ha  $\epsilon = E^{(-)}(\vec{p}) = -E(\vec{p})$ , akkor

$$(M + E(\vec{p}))\chi(\vec{p}) + \vec{\sigma}\vec{p}\phi(\vec{p}) = 0, \quad (5.14)$$

$$\vec{\sigma}\vec{p}\chi(\vec{p}) - (M - E(\vec{p}))\phi(\vec{p}) = 0. \quad (5.15)$$

Az (5.14) egyenletből

$$\chi(\vec{p}) = - \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M + E(\vec{p})} \phi(\vec{p}) \quad (5.16)$$

adódik és így az (5.5) egyenlet megoldása

$$u_{\epsilon < 0}(\vec{p}) = \omega(\vec{p}, \epsilon_r = -1) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M + E(\vec{p})} \phi(\vec{p}) \\ \phi(\vec{p}) \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

ahol  $\phi(\vec{p})$  tetszőleges kétkomponensű spinor. Az (5.2) megoldás most

$$\psi_{-\vec{p}}^{(\epsilon)}(x) = \exp(i E(\vec{p})t - i \vec{p} \cdot \vec{x}) \omega(-\vec{p}, \epsilon_r = -1) = \exp(-i \epsilon_r p x) \omega(-\vec{p}, \epsilon_r = -1) \quad (5.18)$$

alakú, ahol  $p_0 = +E(\vec{p})$ .

Az elfajult állapotok jellemzésére bevezetjük a

$$\Lambda_s = \frac{1}{2} \sum \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \quad \left( \vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \right) \quad (5.19)$$

helicitást /az impulzusnak a spin irányába mutató vetületét/. A helicitás operátor felcserélhető a Hamilton-operátorral és az impulzus-operátorral:

$$[\Lambda_s, H] = 0, \quad [\Lambda_s, \hat{\vec{p}}] = 0, \quad (5.20)$$

ezért az (5.12) és az (5.17) állapotok alterében választhatunk helicitás-sajátállapotokból bázist:

*choose  $\vec{p} = p_z$*

$$\omega(\vec{p}, \epsilon_r = 1, \Lambda_s = \frac{1}{2}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M + E(\vec{p})} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \omega^1(\vec{p}), \quad (5.21)$$

$$\omega(\vec{p}, \epsilon_r = 1, \Lambda_s = -\frac{1}{2}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M + E(\vec{p})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \omega^2(\vec{p}), \quad (5.22)$$

$$\omega(-\vec{p}, \epsilon_r = -1, \Lambda_s = \frac{1}{2}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M + E(\vec{p})} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \omega^3(\vec{p}), \quad (5.23)$$

$$\omega(-\vec{p}, \epsilon_r = -1, \Lambda_s = -\frac{1}{2}) = \mathcal{N} \begin{pmatrix} -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{M + E(\vec{p})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \omega^4(\vec{p}). \quad (5.24)$$

Válasszuk a normálási tényezőt

$$\mathcal{N} = \left( \frac{M + E(\vec{p})}{2E(\vec{p})} \right)^{1/2} \quad (5.25)$$

alakban, akkor

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2 = \vec{p}^2$$

$$\bar{\omega}^{\tau}(\vec{p})_{\alpha} \omega^{\tau'}(\vec{p})_{\alpha} = \frac{M}{E(\vec{p})} \delta^{\tau\tau'} \epsilon_r, \quad (5.26)$$

$$\omega^\tau(\vec{p}\epsilon_\tau)_\alpha \omega^{\tau'}(\vec{p}\epsilon_{\tau'})_\alpha = \delta^{\tau\tau'}, \quad (5.27)$$

$$\sum_{\tau=1}^4 \omega^\tau(\vec{p}\epsilon_\tau)_\alpha \omega^\tau(\vec{p}\epsilon_\tau)_\beta^\dagger = \delta_{\alpha\beta}, \quad (5.28)$$

ahol

$$\epsilon_\tau = \begin{cases} +1, & \text{ha } \tau=1,2 \\ -1, & \text{ha } \tau=3,4 \end{cases}. \quad (5.29)$$

Képezve a Dirac-egyenlet

$$\psi_\vec{p}^\tau(x) = \omega^\tau(\vec{p}) \exp(-i\epsilon_\tau p x) \quad (\tau=1,2,3,4) \quad (5.30)$$

megoldásainak teljes rendszerét és visszahelyettesítve az (5.1) egyenletbe

$$(\gamma^\mu p_\mu - \epsilon_\tau M) \omega^\tau(\vec{p}) = 0 \quad (5.31)$$

adódik, ahonnan

$$\bar{\omega}^\tau(\vec{p}) (\gamma^\mu p_\mu - \epsilon_\tau M) = 0. \quad (5.32)$$

Az (5.30)-(5.32) egyenletekben  $p_0 = +E(\vec{p})$ .

## 6. A szabad részecske polarizációja

A helicitás nem Lorentz-kovariáns módon van definiálva, ezért célszerű a részecske polarizációjának fogalmát Lorentz-kovariáns módon bevezetni.

Ebből a célból induljunk ki abból, hogy a részecske nyugalmi rendszerében /RF=rest frame/ a Dirac-egyenlet megoldásai

$$\vec{p}=0 \quad \psi_0^\tau(x) = \omega^\tau(0) \exp(-i\epsilon_\tau M t), \quad (p_0 = E(\vec{p})) \quad (6.1)$$

ahol

$$\omega^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^3(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \omega^4(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Vegyük észre, hogy a részecske saját nyugalmi rendszeréhez képest  $-\vec{v}$  sebességgel mozgó inerciarendszerben a Dirac-egyenlet (5.30) megoldásaiban szereplő  $\omega^\tau(\vec{p})$  spinorok a (6.2) spinorokból Lorentz-transzformációval képezhetők /ez a Lorentz-invariancia következménye/:

$$\underline{S}(-\vec{v}) \omega^\tau(0) = \exp\left(-\frac{\omega}{2} \vec{\alpha} \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right) \omega^\tau(0) = \omega^\tau(\vec{p}), \quad (6.3)$$

ahol

$$\vec{v} = \frac{\vec{p}}{E(\vec{p})}, \quad -t\hbar \frac{\omega}{2} = \frac{|\vec{p}|}{M + E(\vec{p})}. \quad (6.4)$$

Vezessük be továbbá a

$$\Lambda_{\epsilon_r}(p) = \frac{\epsilon_r \delta^\mu p_\mu + M}{2M} \quad (p_0 = E(\vec{p})) \quad (6.5)$$

operátort. Belátható, hogy a  $\Lambda_+ = \Lambda_1$  ill. a  $\Lambda_- = \Lambda_1$  operátorok a pozitív ill. a negatív energiás állapotok projektorai, ui.

$$a/ \Lambda_{\epsilon_r}(p) \omega^\tau(\vec{p}) = \frac{\epsilon_r \delta^\mu p_\mu + M}{2M} \omega^\tau(\vec{p}) = \frac{\epsilon_r^2 M + M}{2M} \omega^\tau(\vec{p}) = \omega^\tau(\vec{p}). \quad (6.6)$$

Felhasználtuk az (5.31) egyenletet.

$$b/ \Lambda_{\epsilon_r}(p) \Lambda_{\epsilon_{r'}}(p) = \frac{\epsilon_r \epsilon_{r'} p^2 + (\epsilon_r + \epsilon_{r'}) M \delta^\mu p_\mu + M^2}{4M^2} = (1 + \epsilon_r \epsilon_{r'}) \frac{M^2 + \epsilon_r M \delta^\mu p_\mu}{4M^2} =$$

$$= \frac{1 + \epsilon_r \epsilon_{r'}}{2} \Lambda_{\epsilon_r}(p) = \Lambda_{\epsilon_r}(p) \delta_{\epsilon_r \epsilon_{r'}}. \quad (6.7)$$

$$c/ \Lambda_+(p) + \Lambda_-(p) = 1. \quad (6.8)$$

Legyen  $\vec{s}$  egységvektor a részecske nyugalmi rendszerében, amelyre a részecske spinjét vetítjük. Definíció szerint a polarizáció  $s^\mu$  négyesvektorának azt a négyesvektort tekintjük, ami a nyugalmi rendszerben értelmezett

$$(s^\mu)_{RF} = (0, \vec{s}) \quad (6.9)$$

négyesvektorból Lorentz-transzformációval előáll egy tetszőleges inerciarendszerben:

$$s^\mu = a^\mu_\nu (s^\nu)_{RF}. \quad (6.10)$$

A részecske négyesimpulzusára

$$(p^\mu)_{RF} = (M, \vec{0}), \quad p^\mu = a^\mu_\nu (p^\nu)_{RF}. \quad (6.11)$$

Ekkor

$$s^\mu s_\mu = (s^\mu)_{RF} (s_\mu)_{RF} = -\vec{s} \cdot \vec{s} = -1, \quad (6.12)$$

$$p^\mu s_\mu = (p^\mu)_{RF} (s_\mu)_{RF} = 0. \quad (6.13)$$

Másrészt, ha  $s^\mu$  egy (6.12) és (6.13) tulajdonságú négyesvektor, azaz  $s^\mu s_\mu = -1$  és  $p^\mu s_\mu = 0$ , akkor

$$0 = (p^\mu)_{RF} (s_\mu)_{RF} = M (s_0)_{RF}, \text{ azaz } (s_0)_{RF} = 0, \quad (6.14)$$

vagyis  $(s^\mu)_{RF}$  térszerű vektor. Továbbá ekkor

$$-1 = (s^\mu)_{RF} (s_\mu)_{RF} = \vec{s} \cdot (-\vec{s}), \text{ azaz } \vec{s}^2 = 1. \quad (6.15)$$

Ezek szerint bármely (6.12) és (6.13) tulajdonságu négyesvektor polarizációvektornak használható.

Vezessük be a

$$\Sigma(s) = \frac{1 \pm \gamma_5 \gamma^\mu s_\mu}{2} \quad (6.16)$$

projektorokat. A (6.16) operátorok csakugyan projektorok, hiszen

$$\Sigma(s) \Sigma(s) = \Sigma(s), \quad \Sigma(s) \Sigma(-s) = 0 \quad (6.17)$$

és az egységoperátor

$$\Sigma(s) + \Sigma(-s) = 1 \quad (6.18)$$

felbontását teszik lehetővé.

Az  $\omega$  Dirac-spinorral leírt állapotot  $s^\mu$  irányban polarizálnak nevezzük, ha

$$\Sigma(s) \omega = \omega. \quad (6.19)$$

Mivel

$$[H, \Sigma(s)] = 0, \quad [\Lambda_\pm(p), \Sigma(s)] = 0, \quad (6.20)$$

azért megadható a Dirac-egyenlet megoldásainak olyan  $u(\vec{p}, s)$ ,  $v(\vec{p}, s)$  ( $s = \pm$ ) teljes rendszere, hogy

$$(\gamma^\mu p_\mu - M) u(\vec{p}, s) = 0, \quad \Lambda_+(p) u(\vec{p}, s) = u(\vec{p}, s), \quad \Sigma(s) u(\vec{p}, s) = u(\vec{p}, s), \quad (6.21)$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + M) v(\vec{p}, s) = 0, \quad \Lambda_-(p) v(\vec{p}, s) = v(\vec{p}, s), \quad \Sigma(s) v(\vec{p}, s) = v(\vec{p}, s). \quad (6.22)$$

Ha  $(s^\mu)_{\text{ref}} = (0, 0, 0, 1)$ , akkor

$$\begin{aligned} \Sigma(s) \omega^1(0) &= \omega^1(0), & \Sigma(-s) \omega^1(0) &= 0, \\ \Sigma(s) \omega^2(0) &= 0, & \Sigma(-s) \omega^2(0) &= \omega^2(0), \\ \Sigma(s) \omega^3(0) &= 0, & \Sigma(-s) \omega^3(0) &= \omega^3(0), \\ \Sigma(s) \omega^4(0) &= \omega^4(0), & \Sigma(-s) \omega^4(0) &= 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

A (6.3) és (6.23) összefüggés valamint  $[\Sigma(s), \Sigma(-s)] = 0$  figyelembevételével

$$\begin{aligned} u(\vec{p}, s) &= \omega^1(\vec{p}), & v(\vec{p}, s) &= \omega^4(\vec{p}), \\ u(\vec{p}, -s) &= \omega^2(\vec{p}), & v(\vec{p}, -s) &= \omega^3(\vec{p}) \end{aligned} \quad (6.24)$$

adódik.

A Dirac-egyenlet (5.30) alakú megoldásai

$$\begin{aligned}\psi_{\vec{p}}^1(x) &= u(\vec{p}, s) \exp(-ipx) && \text{pozitív energiás, impulzusu, polarizációju,} \\ \psi_{\vec{p}}^2(x) &= u(\vec{p}, -s) \exp(-ipx) && \text{pozitív energiás, impulzusu, polarizációju,} \\ \psi_{-\vec{p}}^3(x) &= v(\vec{p}, -s) \exp(ipx) && \text{negatív energiás, impulzusu, polarizációju,} \\ \psi_{-\vec{p}}^4(x) &= v(\vec{p}, s) \exp(ipx) && \text{negatív energiás, impulzusu, polarizációju,} \\ &&& (6.25)\end{aligned}$$

állapotokat írunk le. A (6.25) állapotok ortonormált teljes rendszert alkotnak, ugyanis az (5.27) és az (5.28) összefüggések alapján:

$$\sum_{\pm s} (u_{\alpha}(\vec{p}, s) u_{\beta}^{\dagger}(\vec{p}, s) + v_{\alpha}(-\vec{p}, s) v_{\beta}^{\dagger}(-\vec{p}, s)) = \delta_{\alpha\beta}, \quad (6.26)$$

$$u_{\alpha}^{\dagger}(\vec{p}, s) u_{\alpha}(\vec{p}, s') = v_{\alpha}^{\dagger}(-\vec{p}, s) v_{\alpha}(-\vec{p}, s') = \delta_{ss'}, \quad (6.27)$$

2

$$u_{\alpha}^{\dagger}(\vec{p}, s) v_{\alpha}(-\vec{p}, s') = v_{\alpha}^{\dagger}(-\vec{p}, s) u_{\alpha}(\vec{p}, s') = 0.$$

Megjegyezzük még, hogy

$$\Lambda_{+}(\not{p}) = \frac{E(\vec{p})}{M} \sum_{\tau=1,2} \omega_{\tau}^{\dagger}(\vec{p}) \bar{\omega}_{\tau}(\vec{p}) \quad \text{és} \quad \Lambda_{-}(\not{p}) = \frac{E(\vec{p})}{M} \sum_{\tau=3,4} \omega_{\tau}^{\dagger}(\vec{p}) \bar{\omega}_{\tau}(\vec{p}). \quad (6.28)$$

## 7. A nukleonra vonatkozó Dirac-egyenlet

Az 1-6. pontban elmondottak bármely nem zérus tömegű, 1/2 spinű részecskére vonatkozhatnak, amelynek nincsenek további szabadsági fokai. A klasszikus példa az elektron.

A nukleonnak további belső szabadsági foka van, az izospin. A nukleon izospinjét tekintve kétállapotú rendszer:

$$\text{proton-állapot: } \zeta_{\uparrow} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{neutron-állapot: } \zeta_{\downarrow} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (7.1)$$

Az izospin-állapotok terén ható  $t^j = \frac{1}{2} \tau^j$  ( $j=1,2,3$ ) izospin-operátorok a 2x2-es unimoduláris unitér mátrixok SU(2) csoportjának generátorai:

$$[t^j, t^k] = i \varepsilon^{jkl} t^l, \quad [t^2, t^j] = 0 \quad (7.2)$$

/  $\tau^j$  a Pauli-mátrixokat jelöli. / Nyilvánvalóan

$$t^3 \zeta_{\uparrow} = \frac{1}{2} \zeta_{\uparrow}, \quad t^3 \zeta_{\downarrow} = -\frac{1}{2} \zeta_{\downarrow}. \quad (7.3)$$

A szabad nukleon Dirac-egyenlete

$$i \partial_t \psi(x) = H \psi(x), \quad H = (\vec{\alpha} \vec{p} + \beta M) \otimes 1_{\tau}, \quad (7.4)$$

ahol  $1_{\tau}$  a 2x2-es egységmátrixot jelöli. A nukleont leíró spinor nyolckomponensű:  $\psi_{\alpha\vartheta}$  ( $\alpha=1,2,3$  a spinor-index és  $\vartheta=1,2$  az izospin-index).

Az izospin-szimmetria miatt

$$[H, t^i] = 0. \quad (7.5)$$

A Dirac-egyenlet síkhullámu megoldásai:

$$\psi_{\vec{p}}^{\tau}(x) = \omega^{\tau}(\vec{p}) \exp(-i\epsilon_{\tau} p x) \quad (\tau = 1, 2, \dots, 8) \quad (7.6)$$

alakuak, ahol

$$\epsilon_{\tau} = \begin{cases} +1, & \text{ha } \tau = 1, 2, 3, 4 \\ -1, & \text{ha } \tau = 5, 6, 7, 8 \end{cases} \quad (7.7)$$

és

$$\begin{aligned} \omega^1(\vec{p}) &= u(\vec{p}, s, \uparrow) = u(\vec{p}, s) \otimes \zeta_{\uparrow}, \\ \omega^2(\vec{p}) &= u(\vec{p}, s, \downarrow) = u(\vec{p}, s) \otimes \zeta_{\downarrow}, \\ \omega^3(\vec{p}) &= u(\vec{p}, -s, \uparrow) = u(\vec{p}, -s) \otimes \zeta_{\uparrow}, \\ \omega^4(\vec{p}) &= u(\vec{p}, -s, \downarrow) = u(\vec{p}, -s) \otimes \zeta_{\downarrow}, \\ \omega^5(\vec{p}) &= v(\vec{p}, s, \uparrow) = v(\vec{p}, s) \otimes \zeta_{\uparrow}, \\ \omega^6(\vec{p}) &= v(\vec{p}, s, \downarrow) = v(\vec{p}, s) \otimes \zeta_{\downarrow}, \\ \omega^7(\vec{p}) &= v(\vec{p}, -s, \uparrow) = v(\vec{p}, -s) \otimes \zeta_{\uparrow}, \\ \omega^8(\vec{p}) &= v(\vec{p}, -s, \downarrow) = v(\vec{p}, -s) \otimes \zeta_{\downarrow}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Az  $E^{(\pm)}(\vec{p}) = \pm E(\vec{p})$  energiájú stacionárius állapotok most  $2 \times 2 = 4$ -szeresen elfajultak.

#### 8. A Dirac-egyenlet és az egyrészecske-kép

Az alábbiakban megmutatjuk, hogy a Dirac-egyenlet egyrészecske-egyenletként való értelmezése ellentmondásokra vezet.

Az elektronokra vonatkozó Dirac-egyenletnek van kontinuum sok negatív energiás megoldása, amelyek tetszőlegesen nagy negatív energiát is megengednek. Ha ezek az üres negatív energiájú nívók a természetben rendelkezésre állnának, akkor a mindig jelenlévő elektromágneses kölcsönhatás miatt az elektronok mind "lecsorognának" és a világ instabil lenne a sugárzással szemben. /Elméleti becslés szerint pl. a H-atom élettartama kisebb lenne mint  $10^{-9}$  s./

A sugárzási katasztrófa elkerülhető, ha csak a pozitív energiás megoldásokat tekintjük fizikainak, és a valóságos részecskéket leíró hullámcsomagokat csak pozitív energiás megoldások szuperpozíciójának tekintjük. Ily módon néhány ellentmondástól megszabadulhatunk.

a/ A sebességoperátor bármely komponensének sajátértékei  $\pm c$ -nek adódnak a Dirac-egyenletből és a sebességösszetevők nem kommutálnak egymással, ui.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\vec{x}, H] = \frac{c}{i\hbar} [\vec{x}, \vec{\alpha} \vec{p}] = c \vec{\alpha}. \quad (8.1)$$

Ugyanakkor, ha csak a pozitív energiás /vagy csak a negatív energiás/ állapotok alterére korlátozódunk, az

$$\frac{1}{2} (\Lambda_+ \vec{v} \Lambda_+ + \Lambda_- \vec{v} \Lambda_-) \quad (8.2)$$

operátor sajátértéke pozitív /negatív/ energiás síkhullámu állapotokban  $\vec{p}$ ,  $c^2 \vec{p} / E(\vec{p})$ .

b/ A helyzetvektor Heisenberg-operátorának várható értéke tetszőleges /pozitív és negatív frekvenciás komponenseket is tartalmazó/ hullámcsomagban nem teljesíti az Ehrenfest-tételt. Csakugyan

$$\langle \vec{x}(t) \rangle = \langle \vec{x}(0) \rangle + \langle \frac{c^2 \vec{p}}{H} \rangle t + \left\langle i \left( \vec{\alpha} - \frac{c \vec{p}}{H} \right) \frac{\hbar c}{2H} \exp\left(-\frac{2iH}{\hbar} t\right) \right\rangle, \quad (8.3)$$

ahol az első két tag a hullámcsomag egyenes vonalú egyenletes mozgását írja le, míg a harmadik tag gyorsan oszcilláló, reszkető mozgásnak /"Zitterbewegung"/ felel meg, amelynek frekvenciája elektron esetén  $1/\tau_e \sim Mc^2/\hbar \sim 10^{20} \text{ s}^{-1}$  és proton esetén  $1/\tau_p \sim 10^{23} \text{ s}^{-1}$  nagyságrendű. Ugyanakkor a reszkető mozgás nem lép fel, ha a hullámcsomag csak pozitív /csak negatív/ frekvenciás hullámok szuperpozíciója, vagyis az

$$\frac{1}{2} (\Lambda_+ \vec{x} \Lambda_+ + \Lambda_- \vec{x} \Lambda_-) \quad (8.4)$$

operátor várható értéke eleget tesz az Ehrenfest-tételnek.

Hiába próbáljuk azonban kiereszokolni a Dirac-egyenlet értelmezését az egyrészecske-képben. Megmutatható ui., hogy egy lokalizált hullámcsomag, amely a  $t=0$  pillanatban csak a pozitív energiás  $\omega^1(0)$  állapotot tartalmazza,

$$\psi(\vec{x}, t=0) \sim \exp(-a|\vec{x}|^2) \omega^1(0) \quad (8.5)$$

( $a > 0$  paraméter), úgy fejlődik az időben tovább, hogy megjelennek benne a negatív energiás  $\omega^3(0)$  és  $\omega^4(0)$  állapotok,

$$\psi(\vec{x}, t \neq 0) \sim c_1(x) \omega^1(0) + c_3(x) \omega^3(0) + c_4(x) \omega^4(0). \quad 8.6$$

Bele kell tehát törődnünk, hogy a Dirac-egyenlet nem értelmezhető úgy mint egyetlen részecske mozgásegyenlete.

## 9. A lyukelmélet

Azt gondolhatnánk, hogy mindaz, amit eddig a Dirac-egyenletről elmondtunk, fölösleges, hiszen az eredeti célt nem értük el, mert a Dirac-egyenlet nem tekinthető egy relativisztikus kvantált részecske mozgásegyenletének. Ennek ellenére a Dirac-egyenlet tanulmányozása elvezetett a lyukelméleten át a töltéskonjugálási szimmetria felismeréséhez és ahhoz a gondolathoz, hogy a részecskéket és az antirészecskéket egy végtelen szabadsági fokú fizikai mező gerjesztéseinek kell te-

kinteni.

Diractól származik az a feltevés, hogy a fizikai vákuum nem üres, hanem benne az összes negatív energiás állapot be van töltve. A feltevés legfontosabb következményei az alábbiak:

a/ A Pauli-elv megakadályozza, hogy a pozitív energiás részecskék "lecsorogjanak" a negatív energiás állapotokba, s így nem következik be sugárzási katasztrófa.

b/ A részecskék száma nem marad meg. Egyrészt, lehetségesé válik külső sugárzás hatására a párkeltés, amikor egy negatív energiás állapot betöltöttsége megszűnik és egy pozitív energiás állapot betöltötté válik. Amíg a háborítatlan vákuum nem vehető észre, addig fizikai objektumként vevődik észre a betöltött pozitív energiás állapot, a részecske, ill. a be nem töltött negatív energiás állapot, a lyuk. Másrészt, egy részecske és egy lyuk kölcsönös megsemmisülése /annihiláció/ is bekövetkezhet, miközben a felszabaduló energia szétsugárzódik. Megjegyezzük, hogy a Heisenberg-féle határozatlansági elv megengedi, hogy  $\sim \hbar/mc^2$  ideig az "energiamegmaradás megsértésével" ún. virtuális lyuk-részecske párok keletkezzenek.

c/ A lyuk egy alkalmas tulajdonságokkal felruházott "részecskével" azonosítható, amit antirészecskének nevezünk. Az antirészecskét jellemző fizikai mennyiségeket úgy találhatjuk ki, hogy a megmaradási törvényeket alkalmazzuk pl. a párkeltés folyamatára. Az elektromos töltés megmaradásából következően

$$0 = q + q_a \Rightarrow q_a = -q, \quad (9.1)$$

ahol  $q$  a részecske töltése,  $q_a$  pedig az antirészecskéé. Az impulzus- és az energia-megmaradás törvénye értelmében egyrészt: foton + negatív energiás "részecske"  $\rightarrow$  részecske

$$\begin{aligned} \vec{k} + \vec{p} &= \vec{p}', \\ \omega + E^{(-)}(\vec{p}) &= E^{(+)}(\vec{p}'), \end{aligned} \quad (9.2)$$

másrészt: foton  $\rightarrow$  antirészecske + részecske

$$\begin{aligned} \vec{k} &= \vec{p}_a + \vec{p}', \\ \omega &= E_a(\vec{p}_a) + E^{(+)}(\vec{p}'). \end{aligned} \quad (9.3)$$

Összehasonlítva a (9.2) és a (9.3) egyenleteket

$$\vec{p}_a = -\vec{p}, \quad E_a(\vec{p}_a) = E_a(-\vec{p}) = -E^{(-)}(\vec{p}) \quad (9.4)$$

adódik. Az antirészecske nyugalmi tömegére a (9.4) összefüggések felhasználásával a részecskéével azonos értéket kapunk:

$$M_a = (E_a^2(\vec{p}_a) - \vec{p}_a^2)^{1/2} = (E^{(-)2}(\vec{p}) - \vec{p}^2)^{1/2} = M. \quad (9.5)$$

Összegezve, a  $q$  töltésű,  $-\vec{p}$  impulzusu és  $E^{(-)}(-\vec{p}) = -E(\vec{p})$  energiájú be nem töltött állapot  $q_a = -q$  töltésű,  $\vec{p}_a = -\vec{p}$  impulzusu és  $E_a = -E^{(-)}(\vec{p}) > 0$  energiájú antirészecskének felel meg. Az antirészecske nyugalmi tömege megegyezik a részecske

nyugalmi tömegével.

Dirac azon felismerését, hogy az elektronnak létezik az antirészecskéje, fényesen igazolta a pozitron felfedezése. A Dirac-feltevés azonban nem volt kielégítő, hiszen a betöltött negatív energiás állapotok tengere végtelen nagy energiát és töltést hordozna.

## 10. A töltéskonjugálás

A tapasztalat szerint minden feles spinű részecskének létezik az antirészecske párja, amelynek ugyanakkora nyugalmi tömege mint a részecskének, de ellentétes a töltése. A tömeg-nívók ilyen értelemben vett elfajulása a töltéskonjugálási szimmetria következménye.

Ha fennáll a töltéskonjugálási szimmetria, akkor létezik olyan  $C$  transzformáció, hogy a

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu - iqA_\mu) - M]\psi(x) = 0 \quad (10.1)$$

Dirac-egyenlet megoldásából képezett

$$\psi_c(x) = C\psi(x) \quad (10.2)$$

függvény a

$$[i\gamma^\mu(\partial_\mu + iqA_\mu) - M]\psi_c(x) = 0 \quad (10.3)$$

Dirac-egyenletnek tesz eleget. A (10.1) egyenlet egy  $q$  töltésű részecskére vonatkozik, a (10.3) egyenlet pedig egy  $-q$  töltésű részecskére.  $A_\mu(x)$  a külső elektromágneses tér vektorpotenciálja.

A töltéskonjugálás  $C$  operátorának explicit alakját könnyen kitalálhatjuk. A  $\partial_\mu$  operátor és az  $iqA_\mu$  kifejezés egymáshoz képesti előjelének megváltozását a komplex konjugálás  $\mathcal{K}$  művelete tudja biztosítani. Ezért a  $C$  operátort

$$C = U_c \mathcal{K} \quad (10.4)$$

alakban keressük, ahol  $U_c$  unitér operátor. Képezzük a (10.1) egyenlet komplex konjugáltját, majd  $U_c^{-1}U_c$  alakban szurjunk be egy egységoperátort a hullámfüggvény elé és szorozzuk meg az egyenletet balról  $U_c$ -vel:

$$U_c[-i\gamma^{\mu*}(\partial_\mu + iqA_\mu) - M]U_c^{-1}\psi_c(x) = 0. \quad (10.5)$$

A (10.5) egyenlet a (10.3) alakot ölti, ha

$$\gamma^\mu = -U_c \gamma^{\mu*} U_c^{-1}. \quad (10.6)$$

A Dirac-mátrixok (2.9) ábrázolásában

$$U_c = i\gamma^2 \quad (10.7)$$

kielégíti a (10.6) egyenletet. Ekkor

$$\psi_c(x) = C\psi(x) = U_c\psi^*(x) \quad (10.8)$$

a  $\psi(x)$  hullámfüggvény töltéskonjugáltja. Bizonyíthatóak a töltéskonjugálás alábbi tulajdonságai:

$$C\psi_c(x) = \psi(x), \quad (10.9)$$

$$\langle \psi_c | H(q) | \psi_c \rangle = -\langle \psi | H(q) | \psi \rangle, \quad (10.10)$$

$$\langle \psi_c | \hat{p} | \psi_c \rangle = -\langle \psi | \hat{p} | \psi \rangle, \quad (10.11)$$

$$\langle \psi_c | \hat{\alpha} | \psi_c \rangle = \langle \psi | \hat{\alpha} | \psi \rangle, \quad \langle \psi_c | \beta | \psi_c \rangle = -\langle \psi | \beta | \psi \rangle, \quad (10.12)$$

$$\psi_c^\dagger(x)\psi_c(x) = \psi^\dagger(x)\psi(x), \quad \psi_c^\dagger(x)\hat{\alpha}\psi_c(x) = \psi^\dagger(x)\hat{\alpha}\psi(x), \quad (10.13)$$

$$\langle \psi_c | \hat{\vec{S}} | \psi_c \rangle = -\langle \psi | \hat{\vec{S}} | \psi \rangle, \quad (10.14)$$

ahol  $\hat{\vec{S}}$  a részecske impulzusmomentumának operátora. A (10.10) - (10.14) összefüggésekből leolvashatjuk, hogy a (10.1) egyenlet negatív energiás,  $-\vec{p}$  impulzusu megoldásainak töltéskonjugáltja a (10.3) Dirac-egyenlet pozitív energiás,  $\vec{p}$  impulzusu megoldása:

$$\psi_{c,\vec{p}}^{\tau'}(x) = C\psi_{-\vec{p}}^{\tau}(x). \quad (\tau=3,4; \tau'=1,2) \quad (10.15)$$

A (10.1) Dirac-egyenlet általános megoldása felírható

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( \sum_{\tau=1}^2 a(\vec{p},\tau) \psi_{\vec{p}}^{\tau}(x) + \sum_{\tau=3}^4 b^*(\vec{p},\tau) \psi_{\vec{p}}^{\tau}(x) \right) = \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left( \sum_{\tau=1}^2 a(\vec{p},\tau) \psi_{\vec{p}}^{\tau}(x) + \sum_{\tau'=1}^2 \tilde{b}(\vec{p},\tau') C\psi_{c,\vec{p}}^{\tau'}(x) \right) \end{aligned} \quad (10.16)$$

alakban, ahol  $a(\vec{p},\tau)$  és  $b^*(\vec{p},\tau)$  tetszőleges komplex együtthatók és

$$\tilde{b}(\vec{p},\tau') = b^*(-\vec{p},\tau'+2). \quad (\tau'=1,2) \quad (10.17)$$

Fizikai jelentést a (10.1) és (10.3) egyenletek pozitív energiás megoldásainak tulajdonítunk:  $\psi_{\vec{p}}^{\tau}(x)$  ( $\tau=1,2$ ) részecskeállapotokat,  $\psi_{c,\vec{p}}^{\tau}(x)$  ( $\tau=1,2$ ) antirészecske állapotokat ír le. Mivel  $C$  antilineáris operátor, azért a Dirac-egyenlet (10.16) általános megoldása fizikai állapotok nemlineáris szuperpozíciója, s így nem rendelkezik a nem relativisztikus kvantummechanikában megszokott hullámfüggvény jelentéssel. A Dirac-egyenlet tehát elvesztette egyrészecske-egyenlet jellegét; egyszerre írja le a részecskéket és az antirészecskéket.

A vákuumállapotot úgy definiálhatjuk, mint az összes  $\psi_{\vec{p}}^{\tau}(x)$  részecske-állapotokra és  $\psi_{c,\vec{p}}^{\tau}(x)$  antirészecske-állapotokra ( $\tau=1,2$ ) ortogonális  $\psi_0$  állapotot:

$$\langle \psi_{\vec{p}}^{\tau} | \psi_0 \rangle = 0, \quad \langle \psi_{c,\vec{p}}^{\tau} | \psi_0 \rangle = 0. \quad (10.18)$$

A (10.18) tulajdonságu vákuumállapot (10.16) sorfejtésében valamennyi együttható zérus; a vákuumállapot nem tartalmaz sem részecskét, sem antirészecskét. Nyilvánvalóan a vákuumállapot energiája és impulzusa zérus:

$$\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle = 0, \quad \langle \psi_0 | \hat{P} | \psi_0 \rangle = 0. \quad (10.19)$$

A töltéskonjugálás segítségével a Dirac-egyenlet olyan értelmezéséhez jutottunk, amikor nem kell negatív energiás fizikai állapotokról és a Dirac-tengerről beszélnünk.

## 11. A CPT-szimmetria

A Dirac-egyenletnek a töltéskonjugálási szimmetrián túl vannak további diszkrét szimmetriái is.

A Dirac-egyenlet invariáns a tértükrözéssel szemben. Létezik olyan  $P$  unitér operátor, hogy az

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = (t, -\vec{x}), \quad \psi(x) \rightarrow \psi_P(x') = P\psi(x) = \psi_P(-\vec{x}, t) \quad (11.1)$$

transzformáció elvégzése után a

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - M) \psi(x) = 0 \quad (11.2)$$

Dirac-egyenletből a

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - M) \psi_P(x) = 0 \quad (11.3)$$

Dirac-egyenletet nyerjük. A Dirac-mátrixok (2.9) ábrázolásában

$$P = \pm \gamma^0. \quad (11.4)$$

A Dirac-egyenlet invariáns az időtükrözéssel szemben is, azaz létezik olyan  $T$  antiunitér operátor, hogy a

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu = (-t, \vec{x}), \quad \psi(x) \rightarrow \psi_T(x') = T\psi(x) = \psi_T(\vec{x}, -t) \quad (11.5)$$

transzformáció elvégzése után a (11.2) egyenlet az

$$(i\gamma^\mu \partial'_\mu - M) \psi_T(x') = 0 \quad (11.6)$$

alakot ölti. A Dirac-mátrixok (2.9) ábrázolásában

$$T = i\gamma^1 \gamma^3 \mathcal{K}. \quad (11.7)$$

Az elmondottakból következik, hogy a Dirac-egyenlet a  $C$ -,  $P$ -,  $T$ -transzformációk egymásutáni végrehajtásával szemben is invariáns, vagyis CPT-szimmetriával rendelkezik. Belátható továbbá, hogy

$$(CPT) \Lambda_{\epsilon_r}(p) (CPT)^{-1} = \Lambda_{\epsilon_r}(p'), \quad p'_\mu = (-p_0, -\vec{p}), \quad (11.8)$$

$$(CPT) \Sigma(s) (CPT)^{-1} = \Sigma(s'), \quad s'_\mu = -s_\mu. \quad (11.9)$$

Figyelembe véve a (11.8) és (11.9) összefüggéseket valamint azt a körülményt, hogy a CPT-transzformáció a hullámfüggvény argumentumát  $(-\vec{x}, -t)$ -ről  $(\vec{x}, t)$ -re változtatja, látjuk, hogy egy negatív energiás,  $-\vec{p}$  impulzusu és  $-s$  polarizációju, "térben és időben visszafelé terjedő" /a hullámfüggvény argumentuma  $(-\vec{x}, -t)$  / részecskét leíró hullámfüggvénynek a CPT-transzformáltja egy pozitív energiás,  $\vec{p}$  impulzusu és  $s$  polarizációju, "térben és időben előre terjedő" /a hullámfüggvény argumentuma  $(\vec{x}, t)$  / antirészecskét leíró hullámfüggvény. Mivel a Dirac-egyenlet CPT-invariáns, azért a fenti két hullámfüggvény ugyanazt a fizikai állapotot írja le, a pozitív energiás,  $\vec{p}$  impulzusu,  $s$  polarizációju antirészecskét.

A negatív energiás részecske-megoldások és a pozitív energiás antirészecske-megoldások fenti kapcsolatát a fizikai folyamatok diagram-nyelven történő leírása során tudjuk majd hasznosítani.

## 12. Homogén, izotróp külső térben mozgó nukleon

### 12.1 Izospin-független külső tér

Tegyük fel, hogy a nukleon a külső, homogén és izotróp  $V^\mu$  vektortér és a  $\phi$  skalártér hatása alatt mozog. A Dirac-egyenlet:

$$[\gamma^\mu (i\partial_\mu - g_v V_\mu) - (M - g_s \phi)] \psi = 0. \quad (12.1.1)$$

Itt  $g_v$  és  $g_s$  a nukleon azon "töltése", amelynek révén kölcsönhat rendre a vektortérrel és a skalártérrel. A külső tér izotrópiája azt jelenti, hogy

$$\vec{V} = 0, \quad (12.1.2)$$

a homogenitás miatt pedig

$$V^0 = \text{áll.} \quad \text{és} \quad \phi = \text{áll.} \quad (12.1.3)$$

A nukleon Hamilton-operátora

$$H = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta (M - g_s \phi) + g_v V^0 \quad (12.1.4)$$

felcserélhető az impulzus, a polarizáció és az izospin operátoraival:

$$[H, \hat{p}] = 0, \quad [H, \Sigma(s)] = 0, \quad [H, t^3] = 0. \quad (12.1.5)$$

Keressük az  $(E, \vec{p}, s, t_3)$  -sajátállapotokat

$$\psi = \exp(-ipx) U(\vec{p}) \quad (12.1.6)$$

alakban. Ekkor az  $U(\vec{p})$  nyolckomponensű spinor az

$$(\gamma^\mu P_\mu - M^*) U(\vec{p}) = 0 \quad (12.1.7)$$

egyenletnek tesz eleget, ahol bevezettük a

$$P_\mu = p_\mu - g_v V_\mu, \quad M^* = M - g_s \phi \quad (12.1.8)$$

jelölést. Szorozzuk meg a (12.1.7) egyenletet balról a  $(\gamma^\mu P_\mu + M^*)$  kifejezéssel; azonos átalakítás után

$$[P_\mu P^\mu - (M^*)^2] 1_D \otimes 1_\tau u(\vec{p}) = 0 \quad (12.1.9)$$

adódik. /Itt  $1_D$  a Dirac-spinorokra ható 4x4-es egységmátrix,  $1_\tau$  az izospin-állapotok terében ható 2x2-es egységmátrix./ A (12.1.9) homogén lineáris egyenletrendszernek akkor és csak akkor létezik nem triviális megoldása, ha

$$\det \{ [P_\mu P^\mu - (M^*)^2] 1_D \otimes 1_\tau \} = 0. \quad (12.1.10)$$

A (12.1.10) egyenlet gyökei

$$p_0 = g_v V^0 \pm E^*(\vec{p}) = E^{(\pm)}(\vec{p}), \quad (12.1.11)$$

ahol

$$E^*(\vec{p}) = [(M^*)^2 + \vec{p}^2]^{1/2}. \quad (12.1.12)$$

A homogén  $\phi$  skalártér hatása olyan mintha a nukleon tömege változna meg, a homogén  $V^0$  skalárpotenciál pedig a nukleon energiájának eltolódását okozza.

Vezessük be az antinukleon-energiákat:

$$\bar{E}^{(+)}(\vec{p}) = -E^{(-)}(\vec{p}) = -g_v V^0 + E^*(\vec{p}). \quad (12.1.13)$$

A nukleon- és az antinukleon-energiákat a 2. ábrán tüntettük fel az impulzus nagyságának  $|\vec{p}|$  függvényében. Az energianívók eredetileg nyolcszoros elfajulását a homogén skalártér nem változtatja meg. Ugyanakkor a homogén skalárpotenciál a részecske- és antirészecske-energiák ellentétes irányu eltolódását eredményezi az energiaskálán és ezért a különvált részecske- és antirészecske-nívók csak négyszeresen elfajultak, ha  $V^0 \neq 0$ .

Vezessük be a (12.1.7) egyenlet  $(\vec{p}, E^{(+)}(\vec{p}), \lambda)$  ill.  $(-\vec{p}, E^{(-)}(\vec{p}), \lambda)$  sajátértékekhez tartozó  $u(\vec{p}, \lambda)$  ill.  $v(\vec{p}, \lambda)$  sajátmegoldásait;  $\lambda = (s, t_3)$ :

$$[\gamma^0 (E^{(+)}(\vec{p}) - g_v V^0) - \vec{\gamma} \vec{p} - M^*] u(\vec{p}, \lambda) = 0, \quad (12.1.14)$$

$$[\gamma^0 (E^{(-)}(\vec{p}) - g_v V^0) + \vec{\gamma} \vec{p} - M^*] v(\vec{p}, \lambda) = 0. \quad (12.1.15)$$

A (12.1.14) és (12.1.15) egyenleteket átrendezve az alábbi egyenleteket kapjuk:

$$(\vec{\alpha} \vec{p} + \beta M^*) u(\vec{p}, \lambda) = E^*(\vec{p}) u(\vec{p}, \lambda), \quad (12.1.16)$$

$$(\vec{\alpha} \vec{p} - \beta M^*) v(\vec{p}, \lambda) = E^*(\vec{p}) v(\vec{p}, \lambda). \quad (12.1.17)$$

Szorozzuk a (12.1.16) egyenletet balról  $u^\dagger \beta$  -val, majd vegyük a (12.1.16) egyenlet adjungáltját és szorozzuk jobbról  $\beta u$  -val és végül adjuk össze az így nyert két egyenletet. A (12.1.17) egyenlettel is hasonlóan járva el, az  $u$  és  $v$  spinorok alábbi tulajdonságát kapjuk:

$$\bar{u}(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda) = \frac{M^*}{E^*(\vec{p})} u^\dagger(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda), \quad \bar{v}(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}, \lambda) = \frac{M^*}{E^*(\vec{p})} v^\dagger(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}, \lambda). \quad (12.1.18)$$

A továbbiakban a spinorokat úgy normáljuk, hogy

$$u^\dagger(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda) = v^\dagger(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}, \lambda) = 1 \quad (12.1.19)$$

legyen.

A (12.1.1) egyenlet általános megoldása

$$\psi(x) = \sum_{\lambda=1}^4 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[ A(\vec{p}, \lambda) u(\vec{p}, \lambda) e^{i\vec{p}\vec{x} - iE^*(\vec{p})t} + B^*(\vec{p}, \lambda) v(\vec{p}, \lambda) e^{-i\vec{p}\vec{x} - iE^*(\vec{p})t} \right] \quad (12.1.20)$$

alaku, ahol  $A(\vec{p}, \lambda)$  és  $B^*(\vec{p}, \lambda)$  tetszőleges komplex együtthatók.

## 12.2. Izospinfüggő külső tér

Tegyük fel, hogy a nukleonra a külső  $V^\mu$  vektortéren és a  $\phi$  skalártéren kívül még az  $A^\mu$  vektorpotenciálu elektromágneses tér és a nukleon izospinjéhez csatolódó  $b^\mu$  vektortér is hat, pontosabban, hogy a nukleon mozgásegyenlete

$$\{ \gamma^\mu [i\partial_\mu - g_v V_\mu - \frac{1}{2} g_\rho \tau_3 b_\mu - \frac{1}{2} e (1 + \tau_3) A_\mu] - (M - g_s \phi) \} \psi = 0 \quad (12.2.1)$$

alaku. Itt  $g_v$ ,  $g_\rho$ ,  $e$  és  $g_s$  a csatolási állandók /"töltések"/. A külső terek homogenitásának és izotropiájának következtében

$$\vec{V} = \vec{A} = \vec{b} = 0, \quad V^0, A^0, b^0, \phi = \text{áll.} \quad (12.2.2)$$

A nukleon Hamilton-operátora

$$H = \vec{\alpha} \vec{p} + \beta (M - g_s \phi) + \left( \frac{1}{2} e A^0 + g_v V^0 \right) + \frac{1}{2} \tau_3 (g_\rho b^0 + e A^0) \quad (12.2.3)$$

most is felcserélhető az impulzus, a polarizáció és az izospin operátoraival. Így most is az  $(E, \vec{p}, s, t_3)$  sajátállapotok teljes rendszerét keressük

$$\psi(x) = \exp(-i p x) u(\vec{p}) \quad (12.2.4)$$

alakban. A (12.2.4) feltevést behelyettesítve a (12.2.1) Dirac-egyenletbe, az  $u(\vec{p})$  spinorra

$$(\gamma^\mu p_\mu - \frac{1}{2} e \gamma^\mu \tau_3 a_\mu - M^*) u(\vec{p}) = 0 \quad (12.2.5)$$

egyenlet adódik, ahol

$$p_\mu = p_\mu - g_v V_\mu - \frac{1}{2} e A_\mu, \quad e a_\mu = g_\rho b_\mu + e A_\mu, \quad M^* = M - g_s \phi. \quad (12.2.6)$$

Bevezetve továbbá a

$$\tilde{P}_\mu = P_\mu - \frac{1}{2} e \tau_3 a_\mu, \quad [\tilde{P}_\mu, \tilde{P}_\nu] = 0 \quad (12.2.7)$$

kommutáló mennyiségeket, a (12.2.6) egyenlet a szabad nukleon Dirac-egyenletével azonos alakot ölt:

$$(\gamma^\mu \tilde{P}_\mu - M^*) U(\vec{p}) = 0. \quad (12.2.8)$$

Szorozzuk meg a (12.2.8) egyenletet balról a  $(\gamma^\mu \tilde{P}_\mu + M^*)$  ki-fejezéssel:

$$1_b \otimes [P_\mu P^\mu + \frac{1}{4} e^2 a_\mu a^\mu - (M^*)^2 - e \tau_3 a_\mu P^\mu] U(\vec{p}) = 0. \quad (12.2.9)$$

A (12.2.9) egyenlet izospin-szerkezetét tekintve  $(x - y \tau_3) = 0$  alakú, ahol  $x$  és  $y$  valós számok. Felhasználva, hogy

$$(x + y \tau_3)(x - y \tau_3) = (x^2 - y^2) 1_\tau, \quad (12.2.10)$$

a (12.2.9) egyenletből az

$$\{ [P_\mu P^\mu + \frac{1}{4} e^2 a_\mu a^\mu - (M^*)^2]^2 - e^2 (a_\mu P^\mu)^2 \} 1_b \otimes 1_\tau U(\vec{p}) = 0 \quad (12.2.11)$$

egyenletet kapjuk. A (12.2.11) homogén lineáris egyenletrendszer nem triviális megoldásai létezésének szükséges és elégséges feltétele, hogy az egyenletrendszer determinánsa eltűnjön:

$$[P_\mu P^\mu + \frac{1}{4} e^2 a_\mu a^\mu - (M^*)^2]^2 - e^2 (a_\mu P^\mu)^2 = 0. \quad (12.2.12)$$

A (12.2.12) egyenlet gyökei

$$P_0 = \pm (E^*(\vec{p}) \pm \frac{1}{2} e a_0), \quad (12.2.13)$$

ahol a négy különböző, lehetséges előjelpárosítás négy különböző gyököt jelent, amelyek mindegyike a polarizáció szerint kétszeresen elfajult energianívót határoz meg:

$$E_{t_3=\pm 1/2, s}^{(+)}(\vec{p}) = E^*(\vec{p}) \pm \frac{1}{2} e a_0 + g_v V_0 + \frac{1}{2} e A_0, \quad (12.2.14)$$

$$E_{t_3=\pm 1/2, s}^{(-)}(\vec{p}) = -E^*(\vec{p}) \pm \frac{1}{2} e a_0 + g_v V_0 + \frac{1}{2} e A_0. \quad (12.2.15)$$

A megfelelő nukleon- és antinukleon-energianívók az alábbiak:

$$\text{proton: } E_{t_3=1/2}^{(+)}(\vec{p}) = E^*(\vec{p}) + g_v V_0 + \frac{1}{2} g_s b_0 + e A_0; \quad (12.2.16)$$

$$\text{neutron: } E_{t_3=-1/2}^{(+)}(\vec{p}) = E^*(\vec{p}) + g_v V_0 - \frac{1}{2} g_s b_0; \quad (12.2.17)$$

$$\text{antiproton: } \bar{E}_{t_3=1/2}^{(+)}(\vec{p}) = E^*(\vec{p}) - g_v V_0 - \frac{1}{2} g_s b_0 - e A_0; \quad (12.2.18)$$

$$\text{antineutron: } \bar{E}_{t_3=-1/2}^{(+)}(\vec{p}) = E^*(\vec{p}) - g_v V_0 + \frac{1}{2} g_s b_0. \quad (12.2.19)$$

### 13. Centrális erőterben mozgó nukleon

Vizsgáljuk a

$$\{i\gamma^\mu \partial_\mu - g_V \gamma^0 V_0(r) - \frac{1}{2} g_S \tau_3 \gamma^0 \phi_0(r) - \frac{1}{2} (1 + \tau_3) e \gamma^0 A_0(r) - (M - g_S \phi(r))\} \psi(x) = 0 \quad (13.1)$$

Dirac-egyenlettel leírt nukleon mozgását, ahol valamennyi erőter centrális. A (13.1) egyenlet stacionárius megoldása

$$\psi(x) = \varphi(\vec{x}) \exp(-iEt) \quad (13.2)$$

alakú, ahol a stacionárius állapot  $\varphi(\vec{x})$  hullámfüggvénye a

$$H = -i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + g_V V_0(r) + \frac{1}{2} g_S \tau_3 \phi_0(r) + \frac{1}{2} (1 + \tau_3) e A_0(r) + \beta (M - g_S \phi(r)) \quad (13.3)$$

Hamilton-operátor  $E$  energiasajátértékhez tartozó sajátfüggvénye. Vezessük be a spin  $\vec{S}$ , a pályaimpulzusmomentum  $\vec{L}$ , és a teljes impulzusmomentum  $\vec{J}$  operátorát:

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\Sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \vec{L} = \vec{r} \times \hat{p}, \quad \vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (13.4)$$

A centrális erőter forgásszimmetriája miatt

$$[H, \vec{J}^k] = [H, \vec{J}^2] = 0, \quad (k=1, 2, 3) \quad (13.5)$$

vagyis a  $\vec{J}$  teljes impulzusmomentum és annak  $m$  vetülete jó kvantumszámok. Ugyancsak mozgásállandó a nukleon spinje  $s = 1/2$ , hiszen

$$[H, \vec{S}^2] = 0. \quad (13.6)$$

A pályaimpulzusmomentum azonban nem megmaradó mennyiség:

$$[H, \vec{L}^2] \neq 0. \quad (13.7)$$

További megmaradó mennyiséget definiál a

$$K = \gamma^0 \left( \vec{\Sigma} \cdot \vec{J} - \frac{1}{2} \right) = \gamma^0 (\vec{\Sigma} \cdot \vec{L} + 1) = \gamma^0 \left( \vec{J}^2 - \vec{L}^2 + \frac{1}{4} \right) \quad (13.8)$$

operátor, mert

$$[H, K] = 0. \quad (13.9)$$

Jelöljük a  $K$  operátor sajátértékeit  $(-\kappa)$ -val.  $\kappa$  és  $j$  egyidejűleg mérhető, mert

$$[K, \vec{J}^2] = 0. \quad (13.10)$$

Most megkeressük  $K$  sajátértékeit és sajátfüggvényeit. Keressük  $K$  és  $\vec{J}^2$  közös sajátfüggvényeit

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{pmatrix} \quad (13.11)$$

alakban. Bevezetve a nagy- ill. a kiskomponensek alterén ható  $\vec{j}$  és  $\vec{l}$  operátorokat, a sajátérték-egyenlet

$$K\varphi = \begin{pmatrix} \vec{j}^2 - \vec{l}^2 + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -(\vec{j}^2 - \vec{l}^2 + \frac{1}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [j(j+1) - \vec{l}^2 + \frac{1}{4}] \varphi_A \\ -[j(j+1) - \vec{l}^2 + \frac{1}{4}] \varphi_B \end{pmatrix} = -\kappa \begin{pmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{pmatrix} \quad (13.12)$$

alaku. A (13.12) egyenletből rendezéssel kapjuk, hogy  $\varphi_A$  és  $\varphi_B$  is a pályaimpulzusmomentum négyzetének sajátfüggvénye, azonban különböző  $l_A \neq l_B$  sajátértékekhez tartoznak:

$$\vec{l}^2 \varphi_A = [j(j+1) + \kappa + \frac{1}{4}] \varphi_A = l_A(l_A+1) \varphi_A, \quad (13.13)$$

$$\vec{l}^2 \varphi_B = [j(j+1) - \kappa + \frac{1}{4}] \varphi_B = l_B(l_B+1) \varphi_B. \quad (13.14)$$

Két lehetőség van:

| $l_A$     | $l_B$     | $\kappa$                        |
|-----------|-----------|---------------------------------|
| $j + 1/2$ | $j - 1/2$ | $j + 1/2 \quad (\kappa > 0)$    |
| $j - 1/2$ | $j + 1/2$ | $-(j + 1/2) \quad (\kappa < 0)$ |

(13.15)

vagyis

$$l_A = \begin{cases} \kappa, & \text{ha } \kappa > 0 \\ -(\kappa+1), & \text{ha } \kappa < 0 \end{cases} \quad (13.16)$$

A (13.15) és a (13.16) összefüggésekből következik, hogy a  $K$  operátor sajátértékei az egész számok:

$$-\kappa = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (13.17)$$

Definiáljuk az impulzusmomentum-összeadás szabályai szerint a  $\Phi_{\kappa m}$  gömbi spinorokat:

$$\Phi_{\kappa m} = \sum_{m_l m_s} \langle l m_l \frac{1}{2} m_s | j m \rangle Y_{l m_l}(\theta, \phi) \chi_{\frac{1}{2} m_s}, \quad \text{ahol } l = \begin{cases} \kappa, & \text{ha } \kappa > 0 \\ -(\kappa+1), & \text{ha } \kappa < 0 \end{cases} \quad (13.18)$$

Segítségükkel a (13.1) egyenletnek a fizikai mennyiségek  $(H, K, \vec{x}^2, \vec{t}^2, t^2)$  teljes rendszerével jellemzett megoldásai

$$\varphi_{\kappa m j}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{i G_{\kappa j}(\tau)}{\tau} \Phi_{\kappa m} \\ -\frac{F_{\kappa j}(\tau)}{\tau} \Phi_{-\kappa m} \end{pmatrix} \otimes \zeta_j \quad (13.19)$$

alakuak, ahol  $n$  az energiasajátértékeket jelölő kvantumszám,  $\vartheta$  pedig az izospin harmadik komponense. Természetesen a (13.19) függvényekből álló teljes rendszer általában tartalmaz pozitív energiás kötött és nem kötött állapotú hullámfüggvényeket, valamint nem kötött negatív energiás hullámfüggvényeket.

A (13.1) egyenlet megoldásait (13.19) alakban keresve és kihasználva a gömbi spinorok ortogonalitását, a  $G_{n\kappa\vartheta}(\tau)$  és az  $F_{n\kappa\vartheta}(\tau)$  radiális hullámfüggvényekre radiális egyenletek vezethetők le:

$$\frac{d}{d\tau} G_{n\kappa\vartheta} = -\frac{\kappa}{\tau} G_{n\kappa\vartheta} + \left[ E + M - g_s \phi(\tau) - \left( g_v V_0(\tau) + \frac{\vartheta}{2} g_\rho b_0(\tau) + e \frac{1+\vartheta}{2} A_0(\tau) \right) \right] F_{n\kappa\vartheta}, \quad (13.20)$$

$$\frac{d}{d\tau} F_{n\kappa\vartheta} = \frac{\kappa}{\tau} F_{n\kappa\vartheta} - \left[ E - M + g_s \phi(\tau) - \left( g_v V_0(\tau) + \frac{\vartheta}{2} g_\rho b_0(\tau) + e \frac{1+\vartheta}{2} A_0(\tau) \right) \right] G_{n\kappa\vartheta}. \quad (13.21)$$

14. A Foldy-Wouthuysen-féle előállítás. A spin-pálya kölcsönhatás

14.1. A szabad részecske esete

Az  $U = \exp(iS)$  unitér transzformációval áttérhetünk olyan reprezentációra, amelyben a pozitív energiás állapotok hullámfüggvényeinek kiskomponense zérus, a negatív energiás állapotok hullámfüggvényeinek pedig a nagykomponense tűnik el:

$$\psi \rightarrow \phi = U\psi = \exp(iS)\psi, \quad H \rightarrow H_\phi = U H U^{-1}, \quad (14.1.1)$$

ahol

$$S = S^\dagger = -\frac{i}{2M} \beta \vec{\alpha} \vec{p} \omega\left(\frac{|\vec{p}|}{M}\right). \quad (14.1.2)$$

Az  $\omega\left(\frac{|\vec{p}|}{M}\right)$  függvényt úgy határozzuk meg, hogy a transzformált  $H_\phi$  Hamilton-operátorban tűnjenek el az  $\vec{\alpha}$  operátort páratlan hatványon tartalmazó tagok, amelyek "összekeverik" a hullámfüggvény kis- és nagykomponenseit:

$$\omega\left(\frac{|\vec{p}|}{M}\right) = \frac{M}{|\vec{p}|} \arctg \frac{|\vec{p}|}{M}. \quad (14.1.3)$$

Ekkor a Dirac-egyenlet Hamilton-operátora

$$H_\phi = \beta E(\vec{p}). \quad (14.1.4)$$

14.2. Nukleon külső térben

A külső térben mozgó nukleon (13.1) Hamilton-operátora

$$H = \beta M + \epsilon + \mathcal{O} \quad (14.2.1)$$

szerkezetű, ahol

$e$  - páros /"even"/ operátor, amely nem keveri a kis- és nagykomponenseket,

$o$  - páratlan /"odd"/ operátor, amely a kis- és a nagykomponenseket összekeveri.

Felhasználjuk a következőket:

a/  $e$  páros hatványai páros operátorok,

b/  $o$  páratlan hatványai páratlan operátorok,

c/  $\beta o + o \beta = 0$ ,  $\beta e - e \beta = 0$ . (14.2.2)

Unitér transzformációval most is elérhetjük, hogy a Hamilton-operátorból  $1/M$  szerinti tetszőleges rendben eltűnjenek a páratlan operátorok. Tegyük ezt meg  $1/M^3$  rendben.

Bevezetjük az

$$S = -\frac{i}{2M} \beta o \quad (14.2.3)$$

operátort, és végrehajtjuk a

$$\phi = \exp(iS) \psi, \quad H' = \exp(iS) H \exp(-iS) \quad (14.2.4)$$

transzformációt. Fejtsük sorba a  $H'$  operátort  $1/M$  hatványai szerint:

$$\begin{aligned} H' &= \left(1 + \frac{iS}{1!} + \frac{i^2 S^2}{2!} + \dots\right) H \left(1 + \frac{-iS}{1!} + \frac{(-i)^2 S^2}{2!} + \dots\right) = \\ &= H + i[S, H] + \frac{i^2}{2!} [S, [S, H]] + \dots + \frac{i^n}{n!} \underbrace{[S, [S, \dots, [S, H] \dots]]}_{n\text{-szer}} + \dots \end{aligned} \quad (14.2.5)$$

/Az utóbbi egyenlőséget beláthatjuk, ha észrevesszük, hogy

$$H' = F(\lambda)|_{\lambda=1}, \quad \text{ahol} \quad F(\lambda) = e^{i\lambda S} H e^{-i\lambda S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n F}{d\lambda^n} \Big|_{\lambda=0} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad (14.2.6)$$

ui.

$$\frac{d^n F}{d\lambda^n} = e^{i\lambda S} i^n \underbrace{[S, [S, \dots, [S, H] \dots]]}_{n\text{-szer}} e^{-i\lambda S} \quad (14.2.7)$$

és így

$$H' = F(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} i^n \underbrace{[S, [S, \dots, [S, H] \dots]]}_{n\text{-szer}}. \quad (14.2.8)$$

Ezt akartuk belátni./

Figyelembe véve, hogy

$$\Theta(H) = M, \quad \Theta(\emptyset) = \Theta(\epsilon) = 1, \quad \Theta(S) = 1/M, \quad (14.2.9)$$

a transzformált Hamilton-operátor  $1/M^3$  renddel bezárólag

$$H' = H + i[S, H] - \frac{1}{2}[S, [S, H]] - \frac{i}{6}[S, [S, [S, H]]] + \\ + \frac{1}{24}[S, [S, [S, [S, \beta M]]]] + O(1/M^4). \quad (14.2.10)$$

A (14.2.10) kifejezés szintén a (14.2.1) szerkezetet mutatja:

$$H' = \beta M + \epsilon' + \emptyset', \quad (14.2.11)$$

ahol

$$\epsilon' = \beta \left( \frac{\emptyset^2}{2M} - \frac{\emptyset^4}{8M^3} \right) + \epsilon - \frac{1}{8M^2} [\emptyset, [\emptyset, \epsilon]], \quad (14.2.12)$$

$$\emptyset' = \frac{\beta}{2M} [\emptyset, \epsilon] - \frac{\emptyset^3}{3M^2}, \quad (14.2.13)$$

de a páratlan operátor magasabb rendű  $1/M$ -ben, mint volt:

$$\Theta(\emptyset') = 1/M. \quad (14.2.14)$$

Most újra végrehajtottunk egy az

$$S' = -\frac{i}{2M} \beta \emptyset' = -\frac{i}{2M} \beta \left( \frac{\beta}{2M} [\emptyset, \epsilon] - \frac{\emptyset^3}{3M^2} \right) \quad (14.2.15)$$

operátor által definiált unitér transzformációt, amelynek az eredménye

$$H'' = e^{iS'} H' e^{-iS'} = \beta M + \epsilon'' + \emptyset'', \quad (14.2.16)$$

ahol

$$\epsilon'' = \epsilon', \quad (14.2.17)$$

$$\emptyset'' = \frac{\beta}{2M} \left[ \frac{\beta}{2M} [\emptyset, \epsilon] - \frac{\emptyset^3}{3M^2}, \frac{\emptyset^2}{2M} + \epsilon \right] + O(1/M^4) \quad (14.2.18)$$

és

$$\Theta(\emptyset'') = 1/M^2. \quad (14.2.19)$$

Még egyszer megismételve az eljárást az

$$S'' = -\frac{i}{2M} \beta \emptyset'' \quad (14.2.20)$$

operátorral, olyan

$$H_\phi = H'' = e^{iS''} H'' e^{-iS''} = \beta M + \epsilon'' + \mathcal{O}(1/M^4) =$$

$$= \beta \left( M + \frac{\phi^2}{2M} - \frac{\phi^4}{8M^3} \right) + \epsilon - \frac{1}{8M^2} [\phi, [\phi, \epsilon]] + \mathcal{O}(1/M^4)$$

Hamilton-operátort kapunk, amelyben  $1/M^3$  renddel bezárólag már nem lép fel páratlan operátor.

Felhasználjuk, hogy a külső térben mozgó nukleon esetében

$$\epsilon = -\beta g_s \phi + \left( \frac{1}{2} e A_0 + g_v V_0 \right) + \frac{1}{2} \tau_3 (g_\rho b_0 + e A_0), \quad (14.2.22)$$

$$\phi = \vec{\alpha} \hat{\vec{p}}, \quad (14.2.23)$$

és

$$H_4 = \beta \left[ M - g_s \phi + \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2M} - g_s \phi \frac{\partial}{\partial M} \frac{\hat{\vec{p}}^2}{2M} - \frac{\hat{\vec{p}}^4}{8M^3} - i \frac{g_s}{2M^2} (\vec{\nabla} \phi) \hat{\vec{p}} - \frac{g_s}{8M^2} \Delta \phi + \vec{\Sigma} (\vec{\nabla} \phi \times \hat{\vec{p}}) \right] +$$

$$+ \left( \frac{1}{2} e A_0 + g_v V_0 \right) + \frac{1}{2} \tau_3 (g_\rho b_0 + e A_0) + \frac{1}{8M^2} \left[ \left( \frac{1}{2} e \Delta A_0 + g_v \Delta V_0 \right) + \frac{1}{2} \tau_3 (g_\rho \Delta b_0 + e \Delta A_0) \right] +$$

$$+ \frac{1}{4M^2} \vec{\Sigma} \cdot \left\{ \left[ \frac{1}{2} e \vec{\nabla} A_0 + g_v \vec{\nabla} V_0 + \frac{1}{2} \tau_3 (g_\rho \vec{\nabla} b_0 + e \vec{\nabla} A_0) \right] \times \hat{\vec{p}} \right\}. \quad (14.2.24)$$

Centrális erőterben a

$$\vec{\Sigma} \cdot (\vec{\nabla} f(r) \times \hat{\vec{p}}) = \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \vec{\Sigma} (\vec{r} \times \hat{\vec{p}}) = \frac{2}{r} \frac{df}{dr} \vec{L} \vec{S} \quad (14.2.25)$$

tipusu tagok spin-pálya kölcsönhatást eredményeznek:

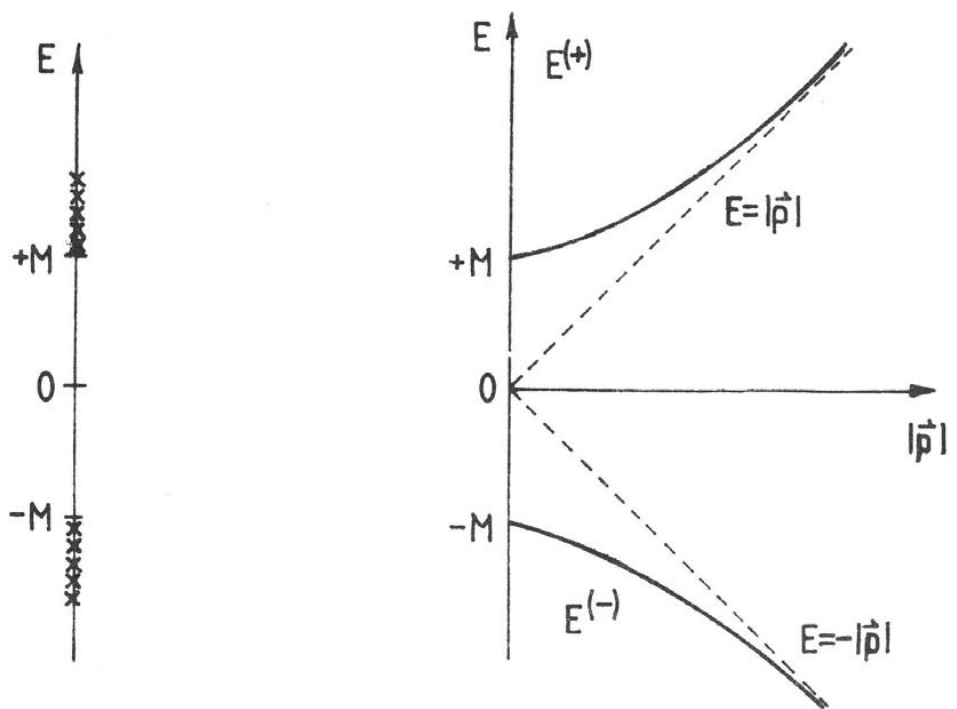
$$\frac{1}{2Mr^2} \left\{ \beta g_s \frac{d\phi}{dr} + \frac{1}{2} e \frac{dA_0}{dr} + g_v \frac{dV_0}{dr} + \frac{\tau_3}{2} \left( g_\rho \frac{db_0}{dr} + e \frac{dA_0}{dr} \right) \right\} \vec{L} \vec{S}. \quad (14.2.26)$$

A (14.2.26) kifejezésből látjuk, hogy a  $\phi$  skalártér kivételével valamennyi külső tér azonos előjelű spin-pálya kölcsönhatást okoz a nukleonnak és az antinukleonnak, a skalártér viszont ellentétes előjelűt. Az  $A_0$  és  $b_0$  külső terek izospin-függő spin-pálya kölcsönhatást okoznak.

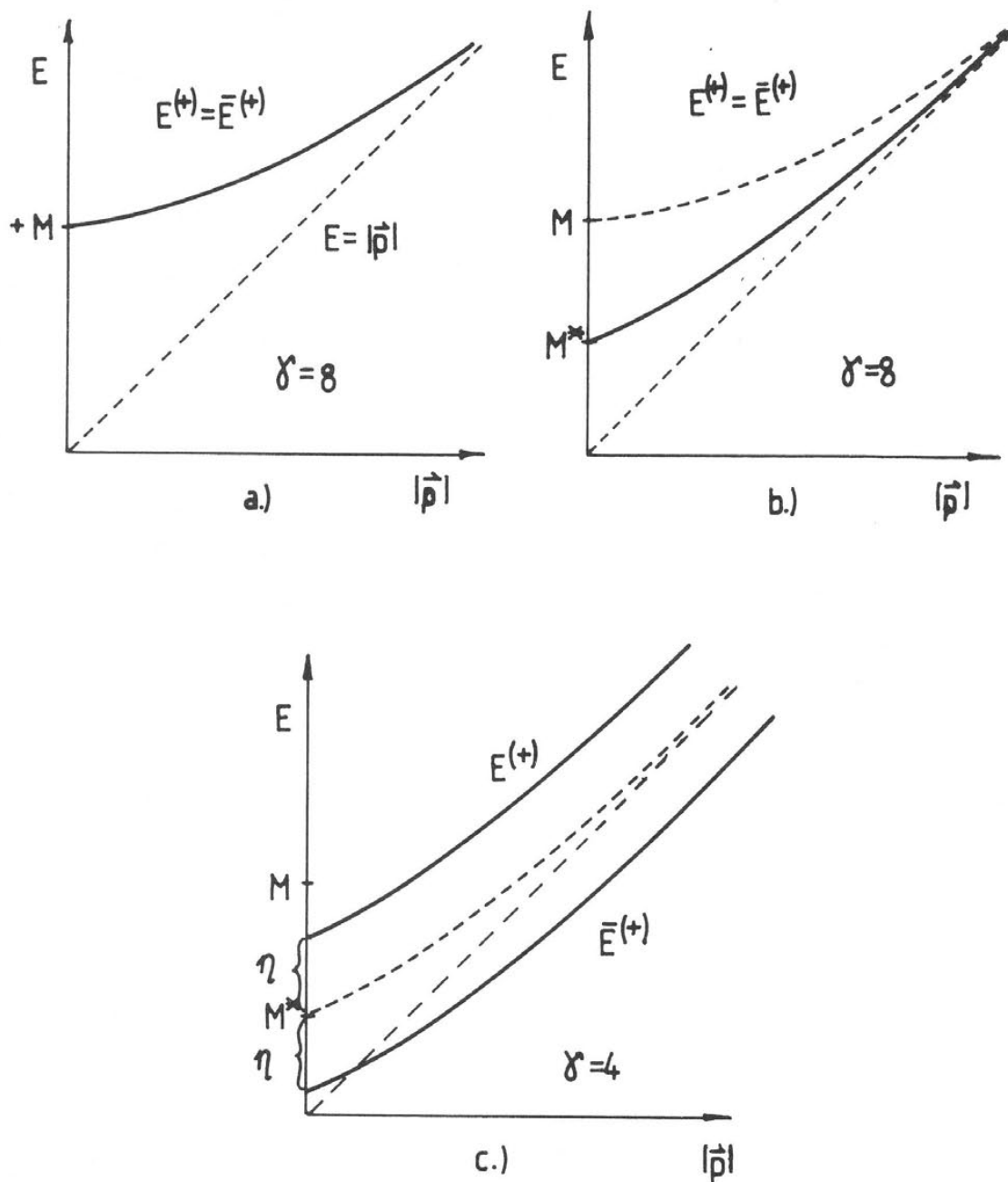
A nukleonok relativisztikus tárgyalásának egyik előnye, hogy automatikusan benne foglaltatik a leírásban az a spin-pálya kölcsönhatás, amelynek létét az atommag héjmodelljében külön fel kellett tételezni.

# IRODALOM

1. B.D. SEROT, J.D. WALECKA, Adv. Nucl. Phys. 16, 1986, 1
2. P.A.M. DIRAC, The Principles of Quantum Mechanics, 1958, Clarendon Press, Oxford
3. W. GREINER, Theoretische Physik, B. 6, Relativistische Quantenmechanik, 1981, Verlag Harri Deutsch, Thun u. Frankfurt am Main
4. J.D. BJORKEN, S.D. DRELL, Relativistic Quantum Fields 1965, McGraw-Hill, New York
5. N.N. BOGOLYUBOV, D.V. SIRKOV, Vvedenie v teoriyu kvantovannüh polej, 1976, Nauka, Moszkva
6. A.I. AKHIEZER, V.B. BERESZTECKIJ, Kvantovaya elektrodinamika, 1969, Nauka, Moszkva



1. ábra Szabad részecske energia-sajátértékei az impulzus nagyságának függvényében



2. ábra Külső  $\phi$  skalártér és  $V^0$  skalárpotenciál hatása alatt mozgó nukleon és antinukleon energiája az impulzus nagyságának függvényében: a/  $V^0 = 0$ ,  $\phi = 0$ ; b/  $V^0 = 0$ ,  $\phi \neq 0$ ; c/  $V^0 \neq 0$ ,  $\phi \neq 0$ .  
 /  $\gamma$  az energianívók elfajultságának foka,  $M^* = M - g_s \phi$ ,  
 $\eta = g_v V^0$  ./